



Le “compressed sensing” (CS) appliqué à l’holographie acoustique de champ proche (NAH)

Dans le cadre du projet ECHANGE

Antoine Peillot¹, Gilles Chardon², François Ollivier¹, Laurent Daudet²

¹ UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d’Alembert, F-75005 Paris, France.

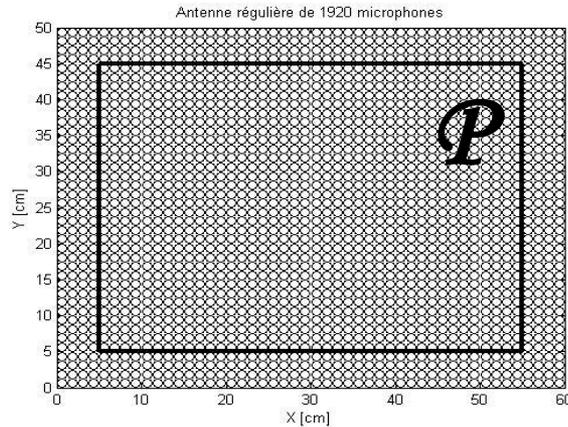
² Institut Langevin, ESPCI ParisTech, CNRS UMR 7587, P6 P7, 10 rue Vauquelin, 75005 Paris, France.

PLAN

- I. Résolution classique du problème inverse d’holographie acoustique de champ proche (NAH)
- II. Le ‘Compressed Sensing’ (CS)
- III. Résolution du problème NAH par CS
- IV. Résultats

I.1 NAH: Principe

Objectif : A partir de la mesure du champ acoustique proche \mathbf{p} , on cherche à reconstruire le champ des vitesses normales vibratoire \mathbf{w} d’une structure vibrante \mathcal{P} par résolution d’un problème inverse.

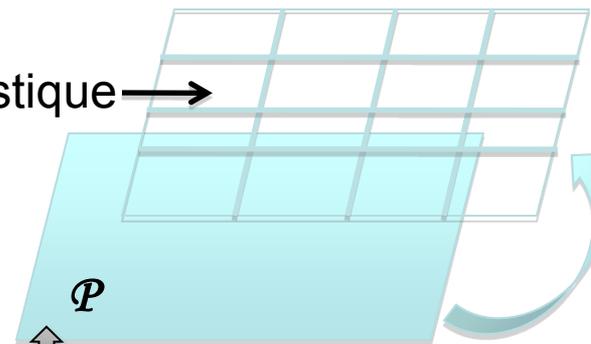


*Distribution des 1920 points de mesures
16 positions de l’antenne physique*



*Dispositif de mesure du champ proche
d’une plaque à bords libres avec 120 microphones*

Plan d’enregistrement du champ acoustique
→ l’hologramme



Propagation
d’ondes planes

Excitation impulsionnelle de \mathcal{P}

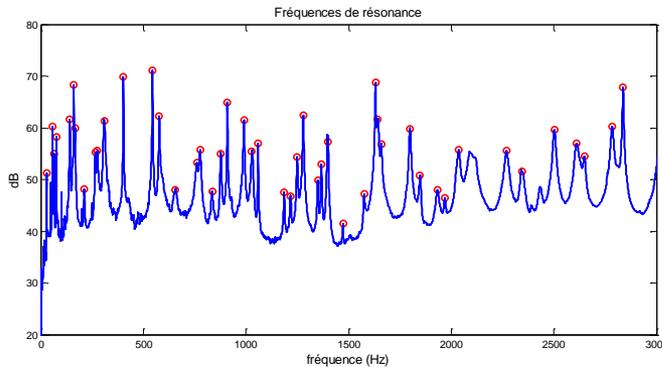
I.1 NAH: Principe

Processus direct : de la source à l’hologramme

Solution harmonique à l’équation de propagation de la vitesse normale

$$\underbrace{\dot{W}(\omega, x, y, z)}_{\text{Vitesse normale en tout point}} = \int \int \underbrace{\dot{W}(\omega, x_0, y_0, z_0)}_{\text{Vitesse normale source}} \underbrace{G(\omega, x - x_0, y - y_0, z - z_0)}_{\text{Propagateur de } (x_0, y_0, z_0) \text{ à } (x, y, z)} dx_0 dy_0$$

La pression acoustique s’écrit:
$$P(x, y, z) = \frac{\rho c k}{k_z} \dot{W}(x, y, z)$$



Moyenne des spectres sur tous les microphones

➔ Etude à une fréquence donnée.

Dans le domaine des nombres d’onde (Fourier spatial)

$$\dot{W}(k_x, k_y, z) = \dot{W}(k_x, k_y, z_0) G(k_x, k_y, z - z_0)$$

I.1 NAH: Principe

Processus direct : de la source à l’hologramme

Dans le plan source, à la fréquence ω , superposition d’ondes de flexion t.q.:

$$\vec{k}_s = k_x \vec{x} + k_y \vec{y}$$

⇒ Naissance d’ondes acoustiques

▪ de nombre d’onde $k = \omega / c$

▪ de composante de propagation verticale $k_z^2 = k^2 - (k_x^2 + k_y^2) = k^2 - k_s^2$

Le propagateur s’écrit $G(\omega, k_x, k_y, z - z_0) = e^{jk_z(z-z_0)}$

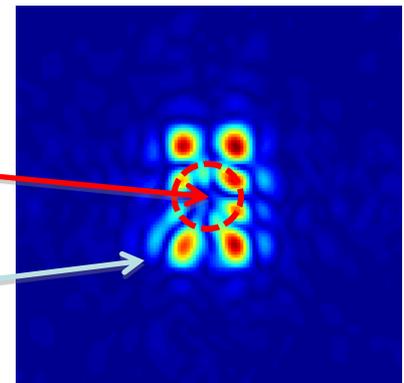
2 cas à considérer:

$$k_s^2 < k^2 \Rightarrow G(\omega, k_x, k_y, z - z_0) = e^{j\sqrt{k^2 - k_s^2}(z-z_0)}$$

Ondes propagatives

$$k_s^2 > k^2 \Rightarrow G(\omega, k_x, k_y, z - z_0) = e^{-\sqrt{k_s^2 - k^2}(z-z_0)}$$

Ondes évanescentes



I.1 NAH: Principe

Processus inverse : de l’hologramme à la source

Vitesse source déduite de la vitesse sur l’ hologramme

$$\dot{W}(x, y, z_0) = TF_{2D}^{-1}(G^{-1}(k_x, k_y, z - z_0)\dot{W}(k_x, k_y, z))$$

Vitesse source déduite de la pression sur l’ hologramme

$$\dot{W}(x, y, z_0) = TF_{2D}^{-1}\left(\frac{k_z}{\rho ck}G^{-1}(k_x, k_y, z - z_0)P(k_x, k_y, z)\right)$$

Il faut distinguer selon K_z :

- les composantes du champ à caractère propagatif .
- les composantes évanescentes \Rightarrow amplification exponentielle de l’amplitude.

$$G^{-1}(z - z_0) = e^{ik_z(z_0 - z)} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{G}^{-1}(z - z_0) = \begin{cases} \exp(ik_z(z_0 - z)) & \text{ondes propagatives} \\ \exp(k_z(z - z_0)) & \text{ondes évanescentes} \end{cases}$$

I.2 NAH: Résolution

Nécessité de régulariser le problème:

La mesure étant inévitablement affectée par du bruit, celui-ci sera amplifié exponentiellement lors de la rétro-propagation des ondes évanescentes.

La régularisation de Tikhonov, souvent utilisée, correspond à rechercher la solution du programme de minimisation suivant:

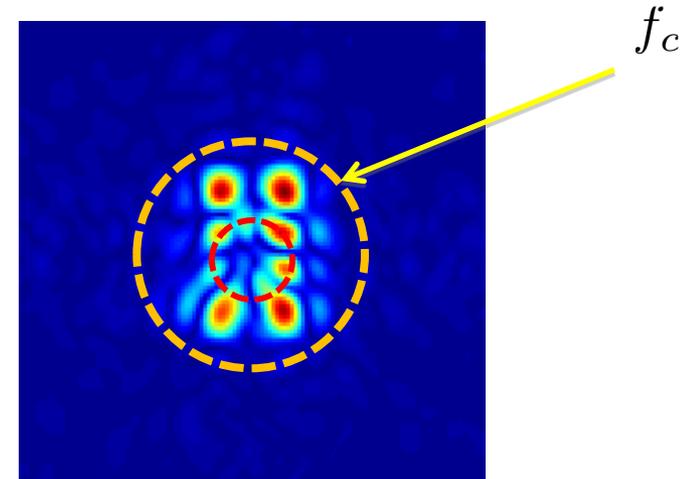
$$\hat{\dot{\mathbf{W}}} = \min_{\dot{\mathbf{W}}} \|\mathbf{P} - \mathbf{G}\dot{\mathbf{W}}\|_2^2 + \alpha \|\dot{\mathbf{W}}\|_2^2$$

Solution: $\hat{\dot{\mathbf{W}}} = \mathbf{H}\mathbf{P}$ avec $\mathbf{H} = (\mathbf{G}^*\mathbf{G} + \alpha\mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^*$



Filtrage passe-bas de fréquence de coupure f_c optimisée par α .

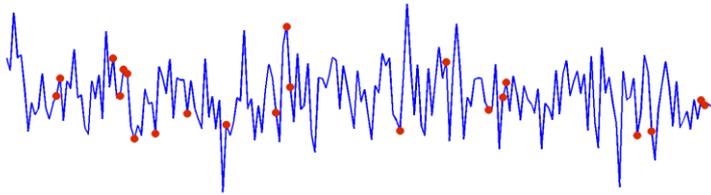
Inconvénient majeur: perte des composantes hautes-fréquences.



II.1 CS : Motivations

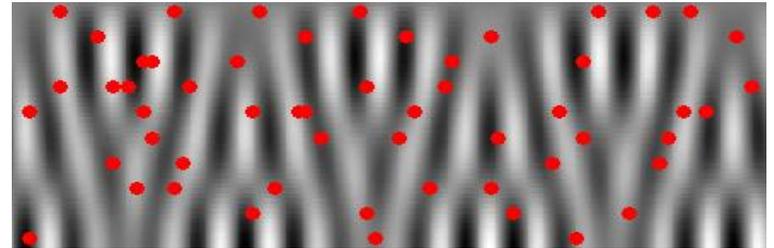
- **Enjeux:** échantillonnage au sens de Shannon\Nyquist $\Rightarrow F_{sampling} \leq 2xF_{max}$.
 - Nécessité de **compression après l’acquisition** pour le transfert et/ou le stockage des signaux à support spectral réduit mais comprenant des hautes fréquences.
 - Acquisition longue et coûteuse en terme de nombre de capteurs.
- **Objectif: comprimer l’information dès la phase d’acquisition** en réduisant:

Le taux d’échantillonnage
d’un signal temporel



ou

Le nombre de capteurs/mesures
dans un champ spatial



- Les échantillons sont acquis aléatoirement.

II.2 CS : Hypothèses et modèle

- Le signal ou le champ s à échantillonner, de dimension N , est parcimonieux ou ‘sparse’: dans une base à identifier, le signal s a une représentation compacte, c’est-à-dire qu’il présente un nombre faible ($K \ll N$) de coefficients non nuls .

Le signal s se décompose sur la base Ψ :

$$s = \psi x \quad s = \sum_{i=1}^N \psi_i x_i$$

- Le signal s et la mesure y sont liés par un opérateur θ à définir:

$$y = \theta s = \theta \psi x \quad \text{On pose } A = \theta \psi$$

- θ et Ψ sont incohérentes \longrightarrow vérification de la RIP avec grande probabilité

$$(1 - \delta_s) \|x_s\|_2^2 \leq \|Ax_s\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|x_s\|_2^2$$

Sous ces hypothèses, la résolution du problème inverse $y = Ax$, où y et A sont connues, admet **une solution unique**.

II.3 CS: Algorithme de reconstruction

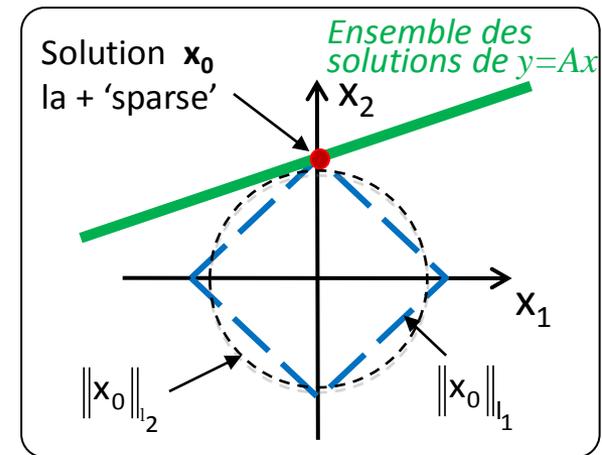
- Condition d’incohérence: Ψ étant imposé, θ aléatoire est un choix pertinent.
- Reconstruction exacte par algorithme dit de ‘basis pursuit’ si la RIP est vérifiée (cf. Candès, Romberg, Tao):

$$\hat{x} = \min \|x\|_1 \text{ sous contrainte } \|y - Ax\|_2 < \epsilon$$

$$\|x\|_1 = \sum |x_i|$$

ϵ = norme L2 de la borne sup du taux de bruit qui doit prendre en compte:

- Le bruit de mesure [imperfections du capteur, chaîne de mesure, réverbération...]
- L’erreur de position des microphones
- L’erreur d’estimation du propagateur
- La quasi-parcimonie du signal



Minimisation l_1 en dimension 2

III. CS: Adaptation à la NAH

Le signal à reconstruire est: $s = \dot{W}$

• L’opérateur θ devient G et modélise la propagation des points de la plaque \mathbf{P} à une **distribution pseudo aléatoire** des 120 microphones de mesures.

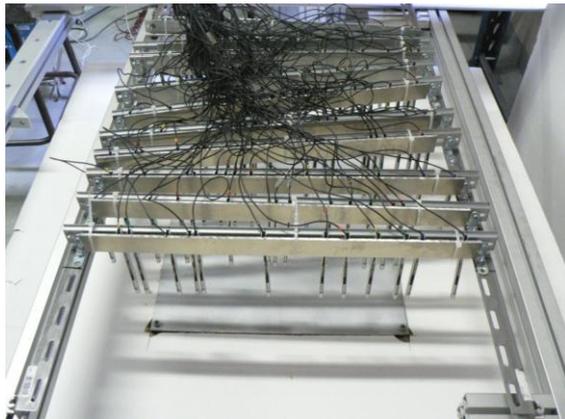
$$\mathbf{P} = \mathbf{G}\dot{W}$$

La pression en un point du demi-espace supérieur à la plaque peut être exprimée par:

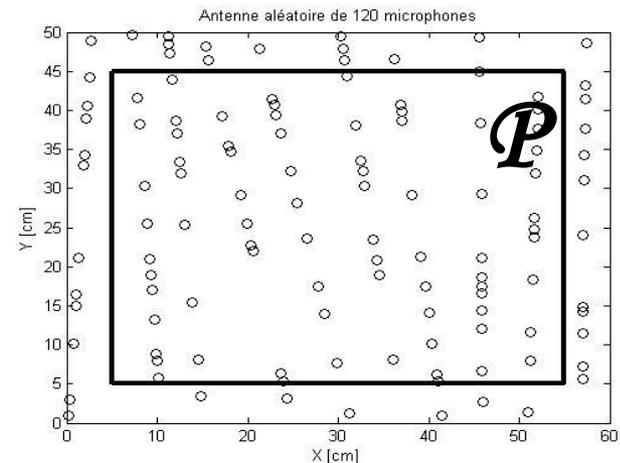
$$p(x, y, z) = \iint g_v(x - x', y - y', z) \dot{w}(x', y') dx' dy'$$

Avec
$$g_v(\vec{r}) = i\rho ck \frac{e^{ik\|\vec{r}\|}}{2\pi\|\vec{r}\|}$$

propagateur monopolaire et éléments de G



Antenne pseudo aléatoire pour le CS
120 microphones



Distribution des 120 points de mesures. Seuls les 60
centraux sont pris en compte

III. CS: Adaptation à la NAH

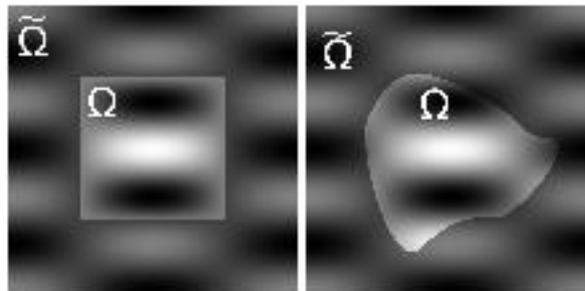
Recherche de dictionnaire t.q: $\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{D}\dot{\mathbf{V}}$

Les modes propres d’une plaque aux bords appuyés de dimension (L_x, L_y) sont:

$$u_{mn} = \sin(m\pi x/L_x) \sin(n\pi y/L_y) \quad , m \text{ et } n \text{ entiers}$$

→ Proportionnel aux coefficients de Fourier sur ce domaine

Le dictionnaire \mathbf{D} est une base de Fourier associée à un domaine plus grand que \mathcal{P} , restreint à \mathcal{P} . Il constitue une base approchée de la base modale de la plaque à bord libre étudiée.



Le problème $y = Ax$ se traduit par $\mathbf{P} = (\mathbf{GD})\dot{\mathbf{V}}$

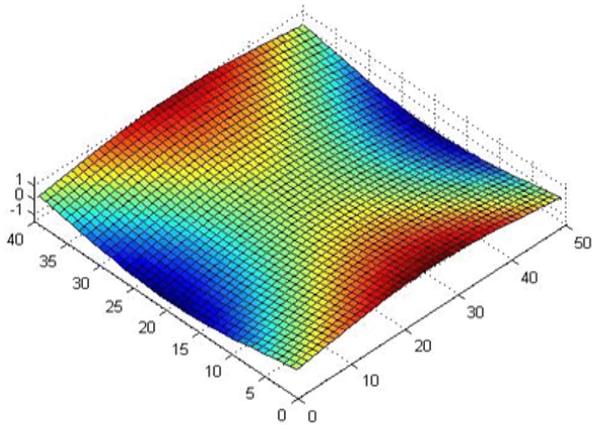


La RIP n’est à priori pas vérifiée à cause des éléments de la matrice \mathbf{G} qui correspondent à l’amplification des ondes évanescentes.

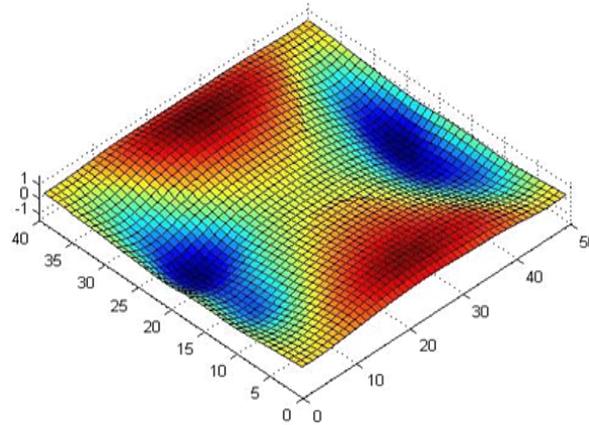
Mais intérêt de l’aléatoire.

IV. Déformée opérationnelle: $F=78\text{Hz}$

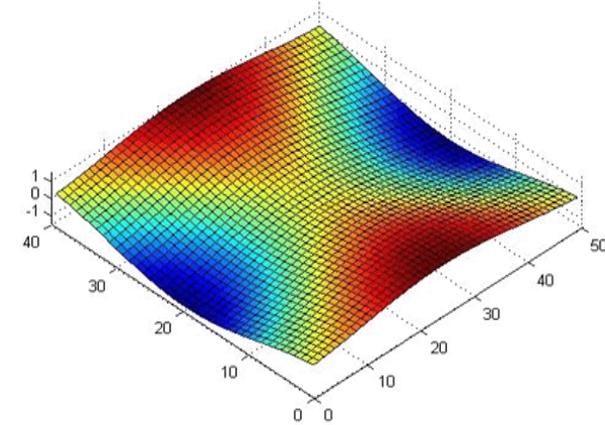
*Mesure de référence
par vibrométrie laser*



*Reconstruction par NAH
1920 micros*



*Reconstruction par CS
60 micros*



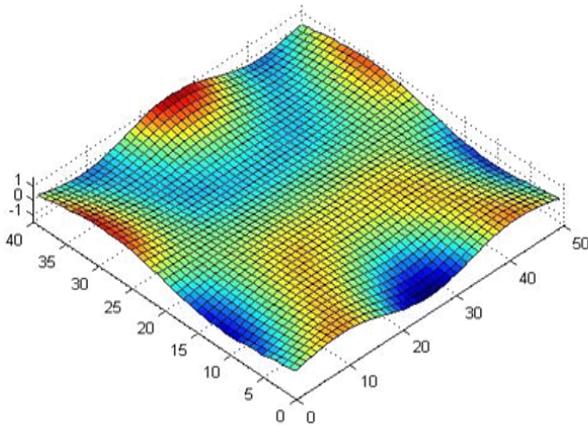
Coefficient de corrélation par
rapport à la mesure de référence:

$C = 70\%$

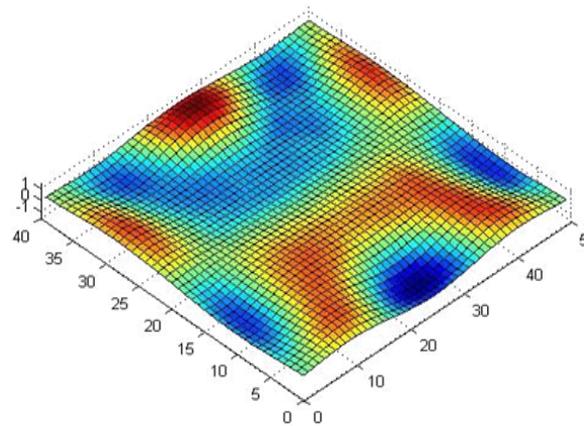
$C = 96\%$

IV. Déformée opérationnelle: $F=402\text{Hz}$

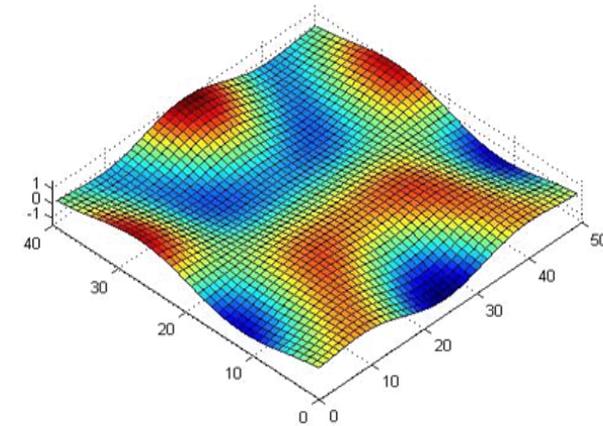
*Mesure de référence
par vibrométrie laser*



*Reconstruction par NAH
1920 micros*



*Reconstruction par CS
60 micros*



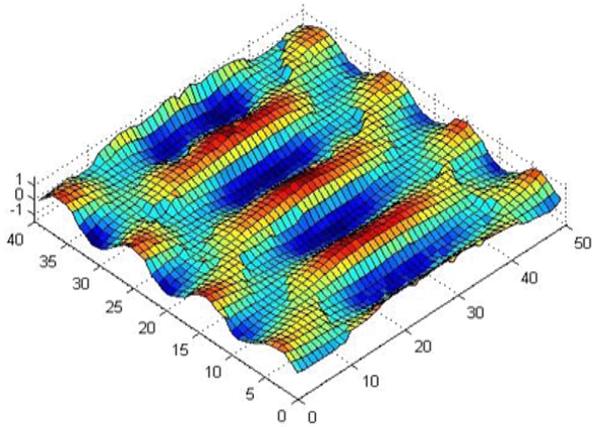
Coefficient de corrélation par
rapport à la mesure de référence:

$C = 81\%$

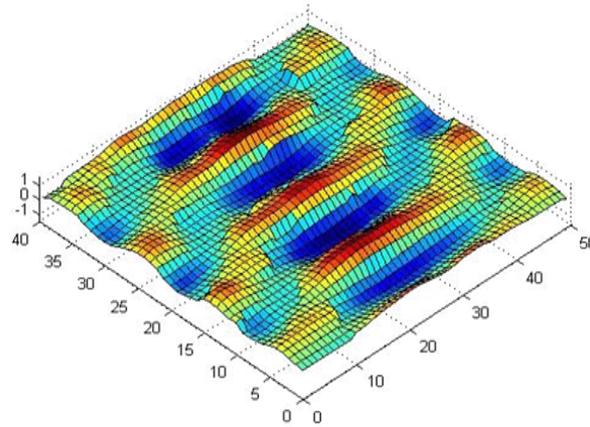
$C = 91\%$

IV. Déformée opérationnelle: $F=2656\text{Hz}$

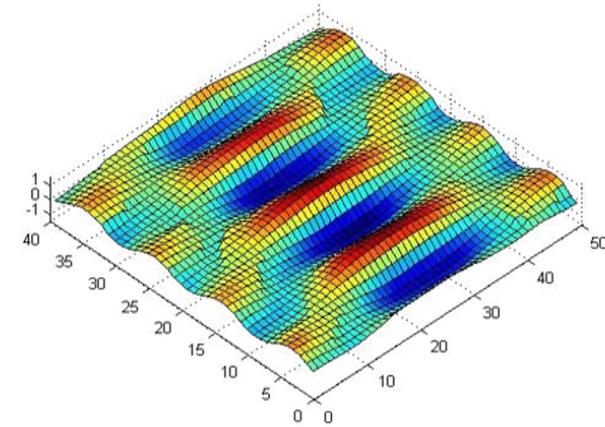
*Mesure de référence
par vibrométrie laser*



*Reconstruction par NAH
1920 micros*



*Reconstruction par CS
60 micros*



Coefficient de corrélation par
rapport à la mesure de référence:

$C = 82\%$

$C = 79\%$

Bilan provisoire

Les faits:

- Modèle de propagation inexacte
- Erreur de position des microphones
- Environnement réverbérant
- RIP non vérifiée

Mais:

- Meilleure régularisation du problème NAH par CS
- Gain en nombre de capteurs non négligeable

Perspectives:

- Etude de dictionnaires adaptatifs pour une structure d'étude quelconque
- Estimation correcte du paramètre d'erreur ϵ
- Etude pour un échantillonnage du champ acoustique aux limites de Shannon

Merci de votre attention