Recalage de modèle par inférence bayésienne

Erliang ZHANG, Jérôme ANTONI, Pierre FEISSEL

Laboratoire *Roberval* de Mécanique

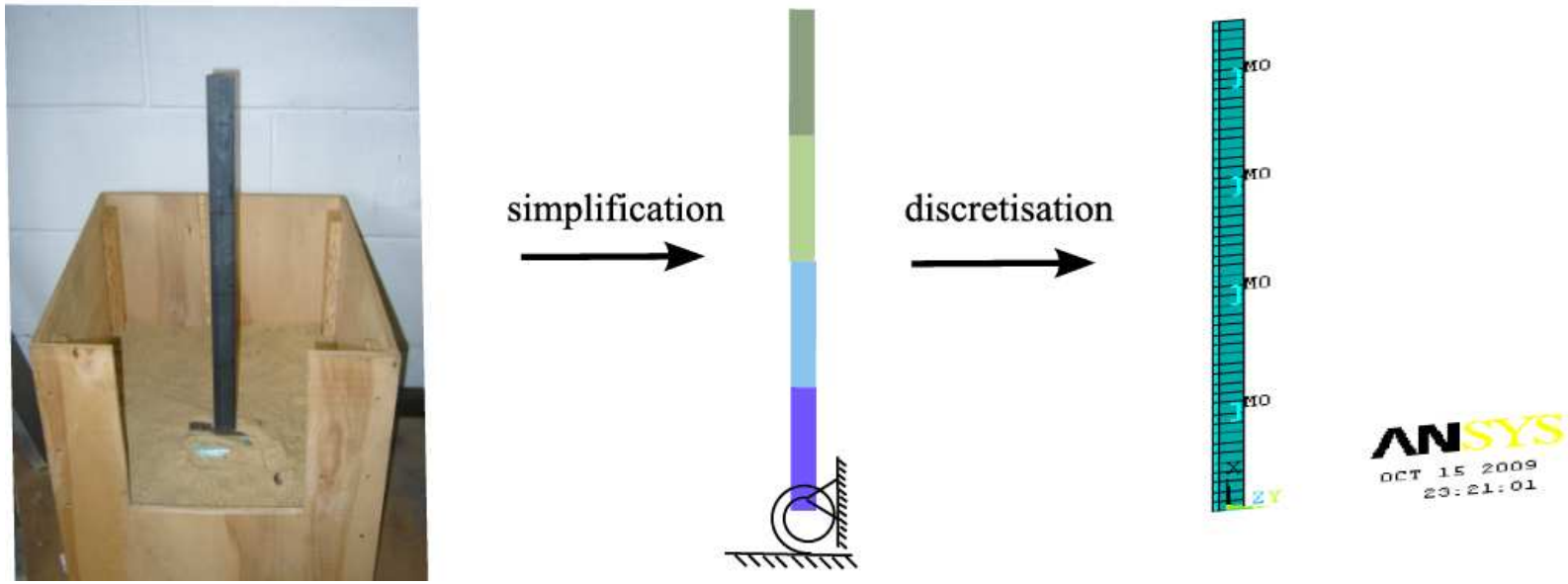
Université de Technologie de Compiègne

Plan

- Introduction
- Inférence bayésienne
- Recalage de modèle par inférence bayésienne
- Applications numérique et expérimentale
- Conclusions

Introduction: modèle éléments finis

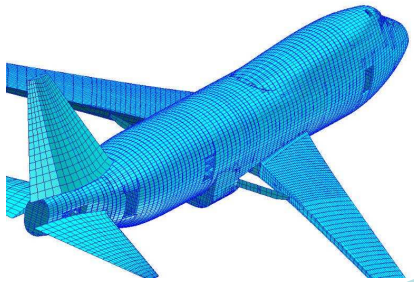
✓ **C'est quoi, modèle éléments finis?**

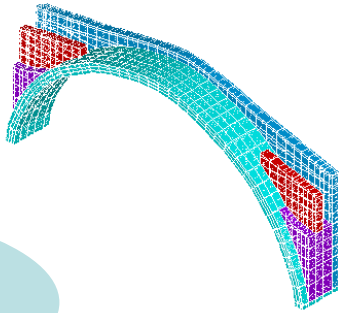


M(θ), K(θ), C(θ)

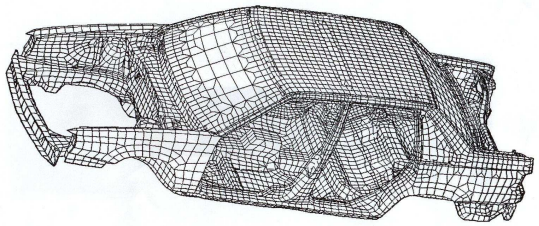
Introduction: modèle éléments finis

✓ **Utilisation vaste:**





Modèle éléments finis
$M(\theta)$



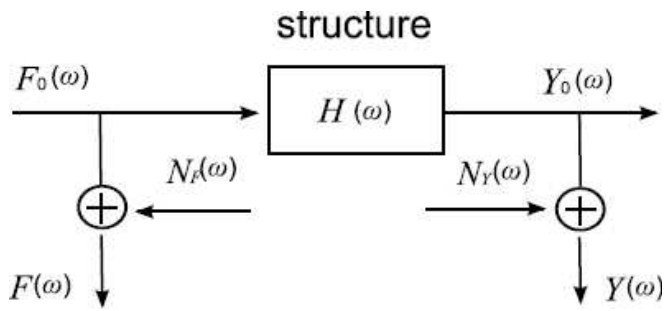
✓ ***Question* :**

Quelles sont les *bon paramètres* et *erreur de modèle* associée?

Introduction: recalage de modèle

$Y(\omega) = H(\omega)F(\omega)$

Mesure expérimentale



$\hat{H}(\omega)$

Modèle numérique

M(θ), K(θ), C(θ) modélisation

(Calcul éléments finis)

Fonctions de transfert

$$H(\alpha(\theta),\omega) = \sum_{r=1}^{n} \frac{-\omega^2 \mathcal{A}_{ij}^{(r)}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\eta_r\omega_r\omega}$$

$H(\omega)$

$\ominus$

$\hat{\theta}$

minimisation

Introduction: Difficultés

✓ Présence des erreurs

- **mesures:** : bruit, non-linéarité de mesures ($Nm(\omega)$)
- **modèle:** : modèle linéaire, erreur de modélisation ($Ne(\omega)$)

✓ Non-unicité

mesures incomplètes

✓ Problème direct

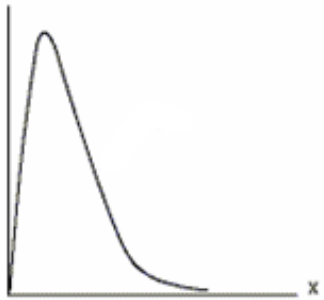
$$\theta \longrightarrow H(\boldsymbol{\alpha}(\theta), \omega)$$

Fonction *nonlinéaire* et *coûteux* en temps:

Introduction: Approche probabiliste

✓ **Solution de recalage:**

Intervalle de confiance, ou distribution de probabilité



✓ ***Problèmes*** **:**

- **Comment prendre compte de ces erreurs au cours d'identification?**
- **Comment résoudre le problème de non-identifiabilité de solution ?**

✓ **Approche probabliste:**

Approche bayésienne, *unique*

Inférence bayésienne

✓ **Règle de Bayes:**

$$p(x|\mathcal{D}) = \frac{p(\hat{H}|x)p(x)}{\int p(\hat{H}|x)p(x)\mathrm{d}x}$$

$\mathcal{D}$: données expérimentales et informations *a priori*

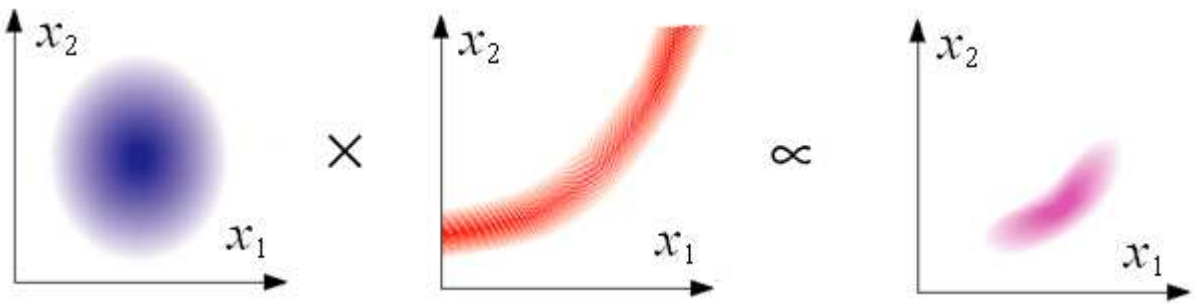
$l(x) = p(\hat{H}|x)$: fonction de vraisemblance.

Inférence bayésienne

✓ **Règle de Bayes:**

$$p(x|\mathcal{D}) = \frac{p(\hat{H}|x)p(x)}{\int p(\hat{H}|x)p(x)\mathrm{d}x}$$

✓ **Fusion d'information:**



info *a priori* **info expérimentale** **info *a posteriori***

$$p(\boldsymbol{x}) \quad \times \quad l(\boldsymbol{x}) \quad \propto \quad p(\boldsymbol{x}|\mathcal{D})$$

Inférence bayésienne: démarche

Distribution d'erreurs

$l(x)$

$p(x)$

$p(x|\mathcal{D})$

- **Distribution de probabilité marginale**

$$p(\mathbf{x}_{[j]}) = \int_{\mathbf{x}_{[-j]}} p(\mathbf{x}_{[j]}, \mathbf{x}_{[-j]}|\mathcal{D})\mathrm{d}\mathbf{x}_{[-j]}$$

- **Maximum *a posteriori* (MAP)**
- **Espérance *a posteriori* (EAP)**
- **Matrice de covariance *a posteriori***

Prédiction dans le cadre bayésien

$$p(H^* \,|\mathcal{D}) = \int p_N(H^*|\boldsymbol{\theta})p(x\,|\mathcal{D})\,\mathrm{d}x$$

avec H^*: fonction de transfert à prédire.

Problème direct

✓ **Problème directe:**

$$p(x|\mathcal{D}) = \frac{p(\hat{H}|x)p(x)}{\int p(\hat{H}|x)p(x)\mathrm{d}x}$$

$$\theta \longrightarrow H(\boldsymbol{\alpha}(\theta), \omega)$$

Coûteux en temps

✓**Méta-modèle**

Chaos Polynomial:

- **une représentation des variables aléatoires générale,**
- **une surface de réponse exacte pour une large incertitude.**

Méta-modèle par chaos polynomial

✓ Représentation sur Chaos Polynomial d'Hermite

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi})$$

ξ: variables normales centrées réduites

avec

$$\int \Psi_i(\boldsymbol{\xi})\Psi_j(\boldsymbol{\xi})\pi(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \begin{cases} \langle \Psi_i^2 \rangle & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

✓ Estimation des coefficients

$$\mathbf{a}_k = \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \rangle}{\langle \Psi_k(\boldsymbol{\xi})\Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \rangle}$$

avec $\langle \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \rangle = \int \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\Psi_k(\boldsymbol{\xi})\pi(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}$

Distribution *a priori*

$$p(x|\mathcal{D}) = \frac{p(\hat{H}|x)p(x)}{\int p(\hat{H}|x)p(x)\mathrm{d}x}$$

✓ Inconnus:

x {
- paramètres de modèle θ
- bruit de mesures
- non-linéarité de mesures
- erreur de modélisation

✓ Paramètres de modèle:

- **Paramètres physiques aléatoires**
  θ = {propriétés matériaux et géométriques, conditions aux limites, etc.}

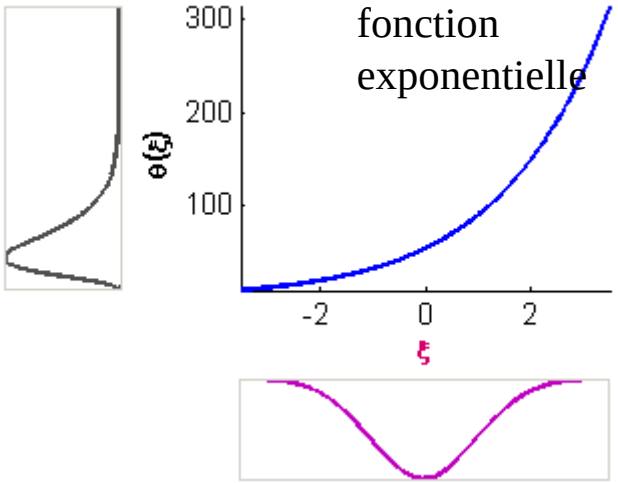
- **Champs physiques stochastiques**

Distribution *a priori* des paramètres de modèle

✓ **Construction de $p(\theta)$**

- **Avis d'expert, principe d'entropie maximale.**

✓ **Représentation par variable chaos**



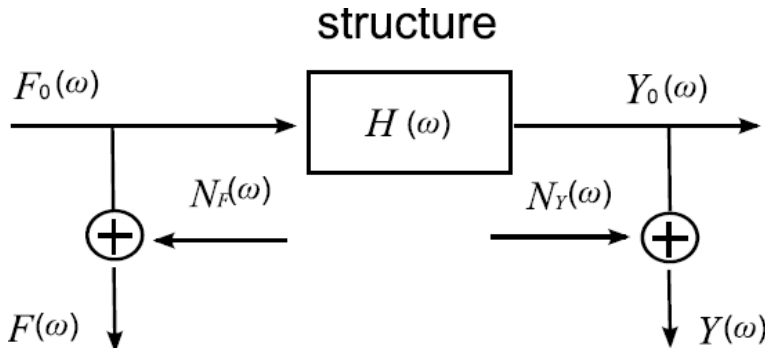
ex: θ une variable lognormale

Caractérisation *a priori* du bruit et de la nonlinéarité

✓ **Propriété stochastique du bruit en fréquence:**

$N = \Re(N) + j\Im(N), \quad j = \sqrt{-1}$ normale complexe circulaire centrée réduite

$N(\omega) \sim \mathcal{N}_c(0, \sigma_N^2(\omega))$

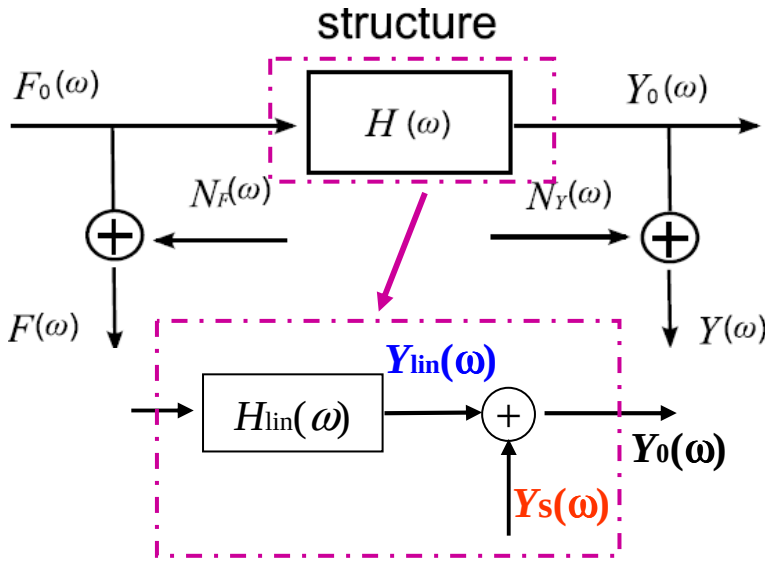


Caractérisation *a priori* du bruit et de la nonlinéarité

✓ Propriété stochastique du bruit en fréquence:

$N = \Re(N) + j\Im(N), \quad j = \sqrt{-1}$ normale complexe circulaire centrée réduite

$N(\omega) \sim \mathcal{N}_c(0, \sigma_N^2(\omega))$



✓ Propriété stochastique de la nonlinéarité en fréquence:

Sous excitation gaussienne,

$N_{Y_S}(\omega) \sim \mathcal{N}_c(0, \sigma_{Y_S}^2(\omega))$

Caractérisation *a priori* du bruit et de la nonlinéarité

✓ **Multi-sinus avec phase aléatoire**

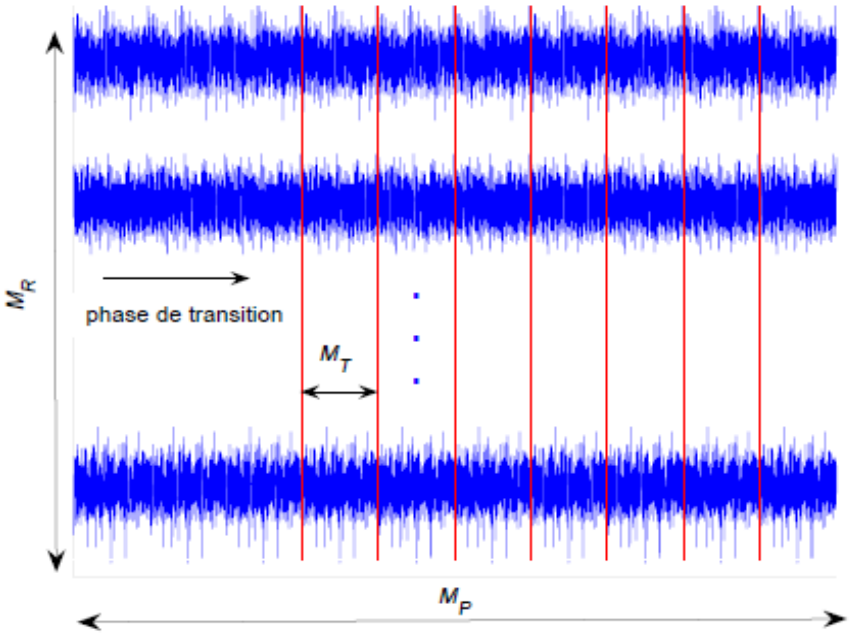
$$r(t) = \sum_{k=1}^{n_\omega} R_k \sin(\omega_k t + \varphi_k),\ \omega_k = 2\pi k/T$$

avec $\mathbb{E}(e^{j\varphi_k}) = 0$

✓ **Protocole expérimentale**

variance de bruit
(sur périodes)

variance de la non-linéarité
(sur réalisations)



Distribution a priori de l'erreur de modélisation

✓ **Erreur de modélisation $N_e(\omega)$**

- **Simplification de la réalité**
- **Erreur systématique**

✓ **Détermination de la distribution de probabilité $p(N_e)$**

Hypothèse:

$$N_e \sim N_c(0, \sigma[C])$$

avec [C] matrice de corrélation connue

Fonction de vraisemblance

✓ **Ecart entre mesure-modèle**

$$p(x|\mathcal{D}) = \frac{p(\hat{H}|x)p(x)}{\int p(\hat{H}|x)p(x)\mathrm{d}x}$$

$$\begin{aligned}\hat{H} - H(\boldsymbol{\alpha}(\xi)) &= N_m + N_e \\ &= \underbrace{(\hat{H} - H_{\text{lin}})}_{\text{Erreur de mesure}} + \underbrace{(H_{\text{lin}} - H(\boldsymbol{\alpha}(\xi)))}_{\text{Erreur de modèle}}\end{aligned}$$

✓ **Fonction de vraisemblance**

$$\begin{aligned}l(\boldsymbol{\xi}, \sigma) &= p(\hat{H} - H(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}))) \\ &= \int p_{N_m}(\hat{H} - H_{\text{lin}}) p_{N_e}(H_{\text{lin}} - H(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})))\mathrm{d}H_{\text{lin}}\end{aligned}$$

Distribution de probabilité *a posteriori*

✓ **Distribution *a posteriori* par la règle de Bayes :**

$$p(\boldsymbol{\xi}, \sigma^2 | \mathcal{D}) \;\propto\; l(\boldsymbol{\xi}, \sigma^2) p(\boldsymbol{\xi}) p(\sigma^2)$$

- **Distribution marginale *a posteriori* des paramètres**
- **MAP**
- **EAP**
- **….**

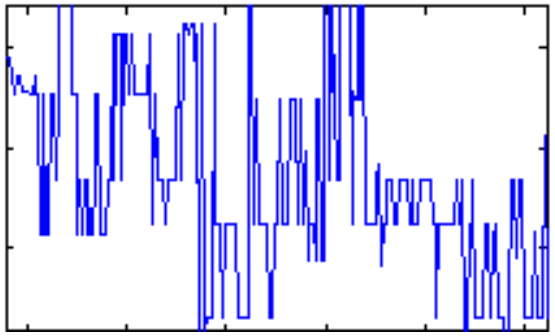
✓ ***Problème*: $p(\boldsymbol{\xi}, \sigma^2 | \mathcal{D})$ une fonction très compliquée!**

→ **Besoin d'une méthode d'échantillonnage général.**

Monte Carlo par Chaînes de Markov (MCMC)

✓ **Idée:**

Créer un processus de Markov dont la distribution stationnaire limite est $p(\xi, \sigma^2|\mathcal{D})$



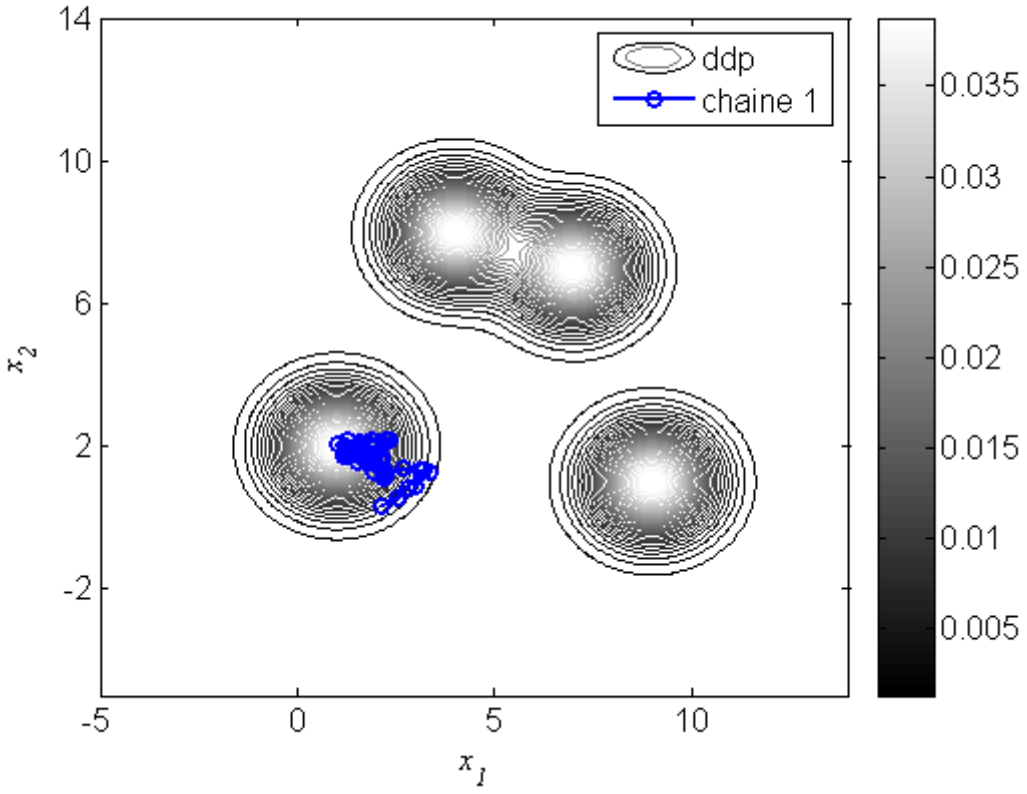
(exemple: chaîne de Markov)

✓ **Problème**

MCMC classique :

- **Convergence lente,**
- **Facilement bloqué autour d'un mode local.**

Monte Carlo par Chaînes de Markov évolutionnaire

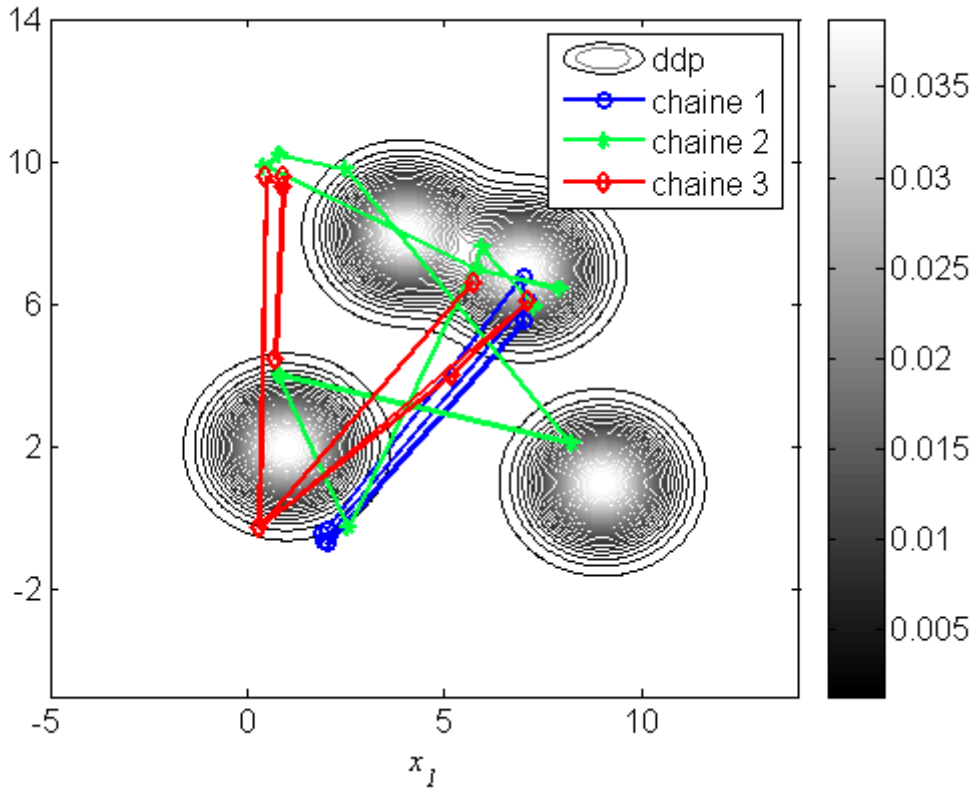


Monte Carlo par Chaînes de Markov évolutionnaire

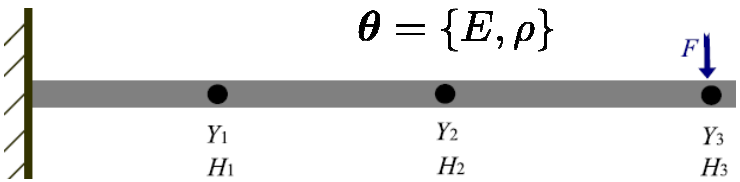
✓ **Améliorations:**

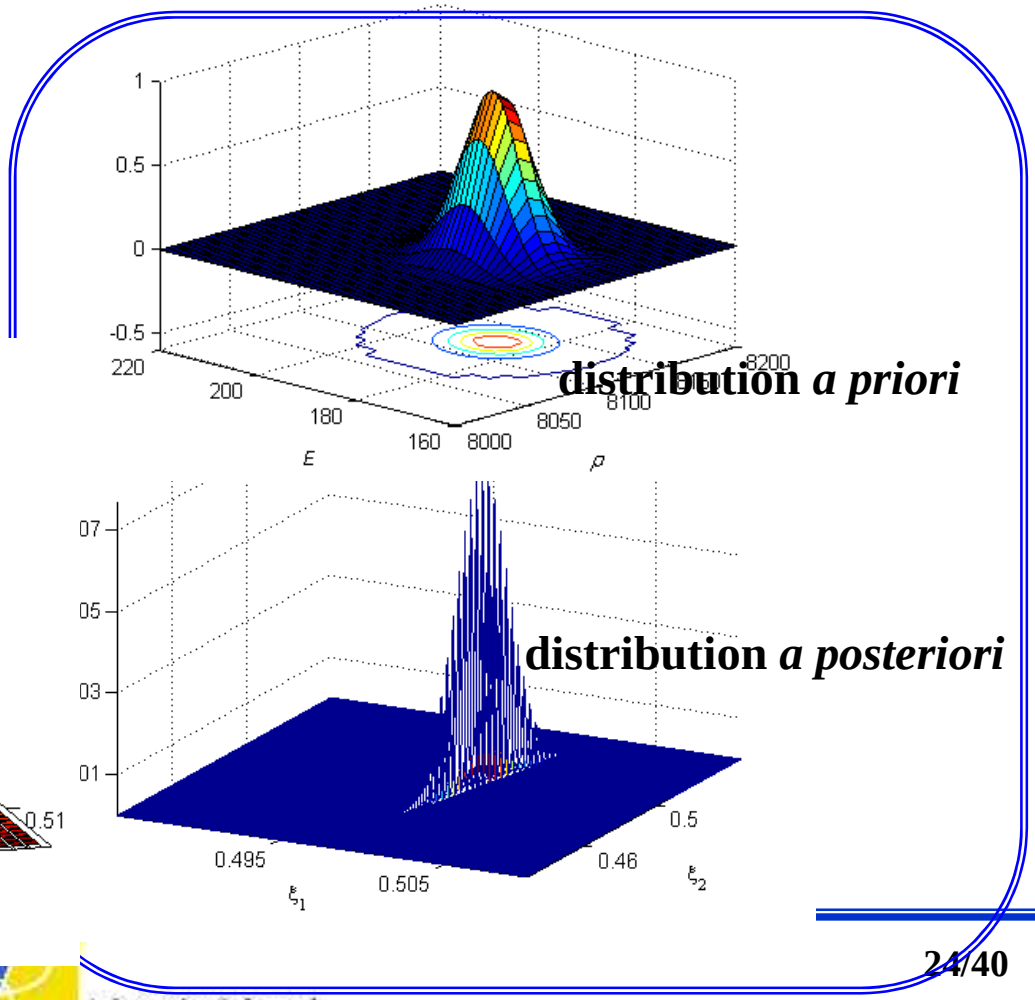
- Une population de chaînes
- Technique de *Parallel tempering*
- Algorithme évolutionnaire

  (Opération de Croisement)

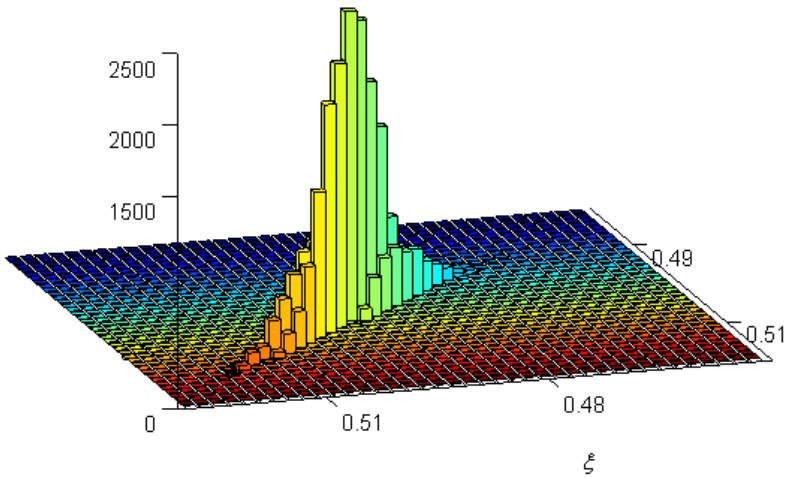


Exemple 1: modèle simple d'une poutre



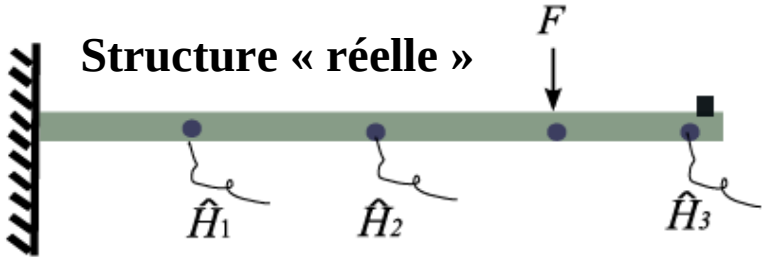


histogramme par MCMC

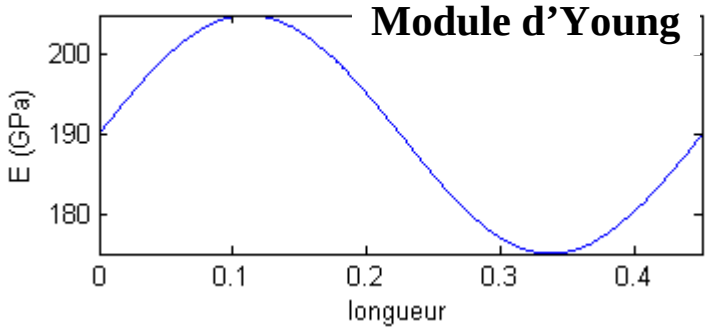


Exemple 2: Application complète

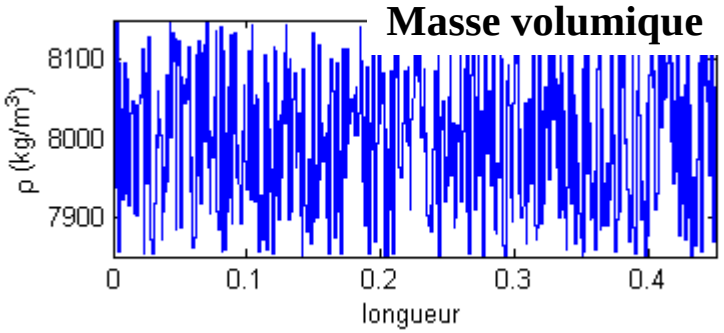
Structure « réelle »



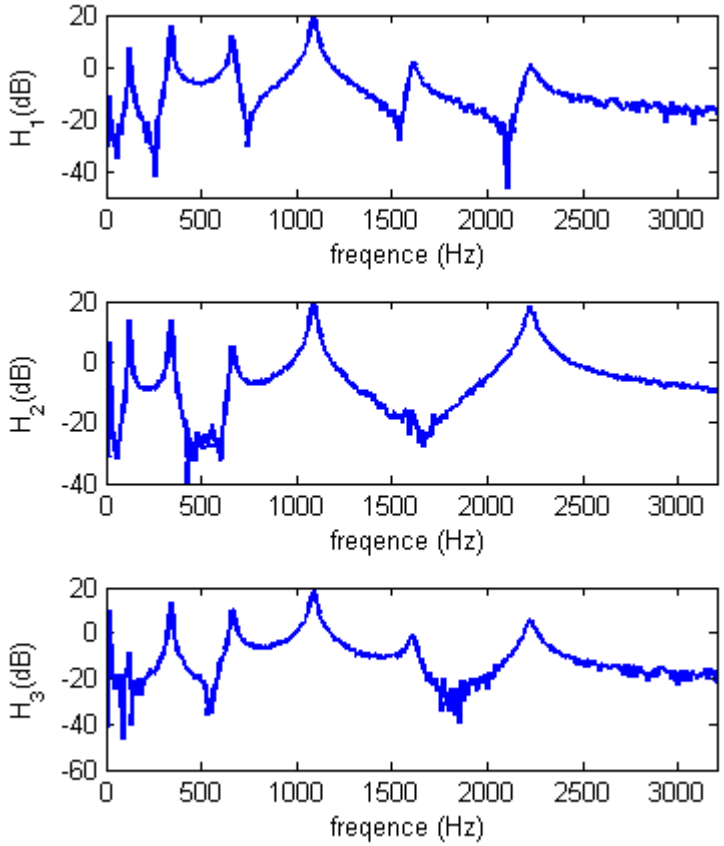
Module d'Young



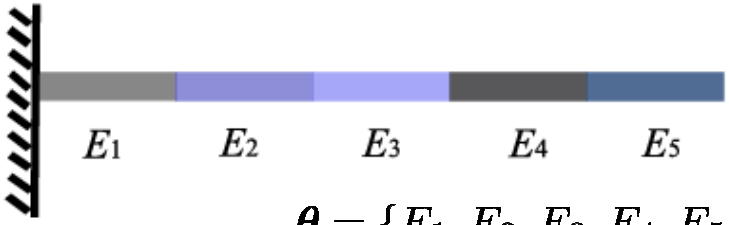
Masse volumique



Mesures simulées



Modèle et Chaines de Markov

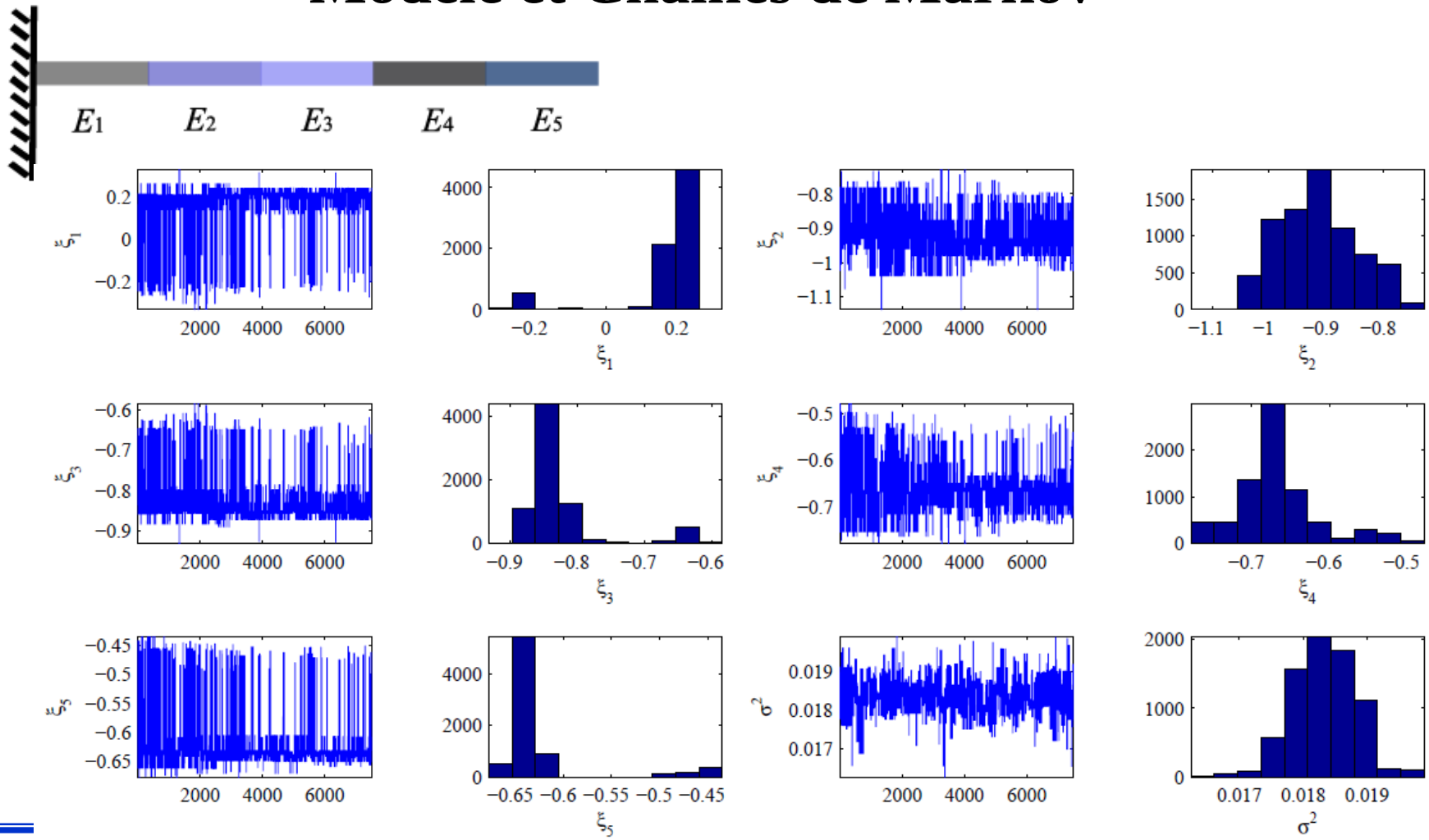


$$\boldsymbol{\theta} = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$$

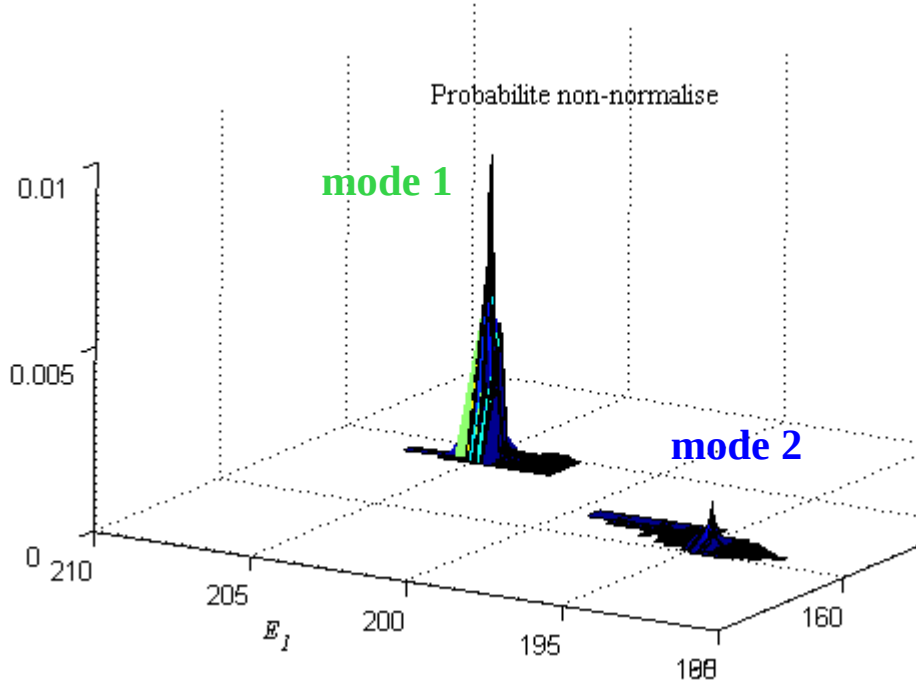
Erreur de modélisation:

- ✓ **Négligence de masse ponctuelle**
- ✓ **Uniformisation de propriété matérielle**

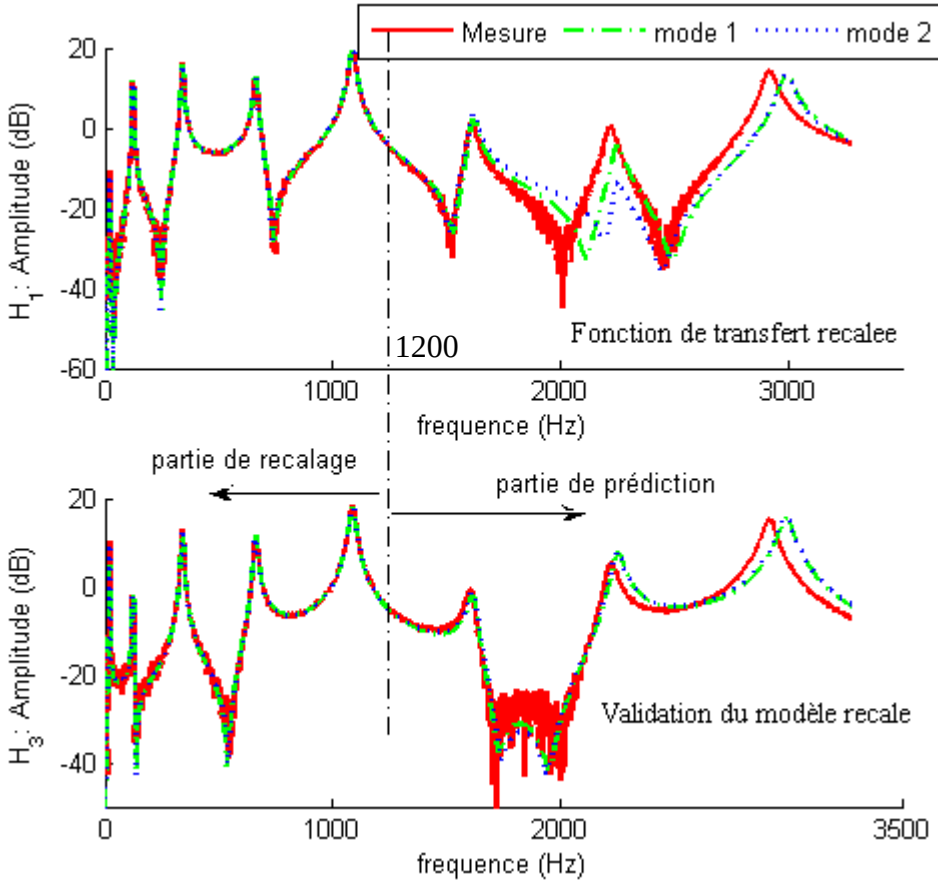
Modèle et Chaines de Markov



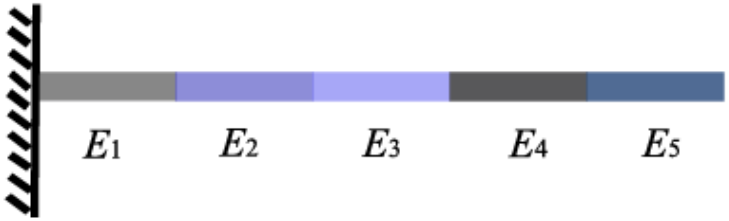
Fonctions de transfert recalées et loi marginale



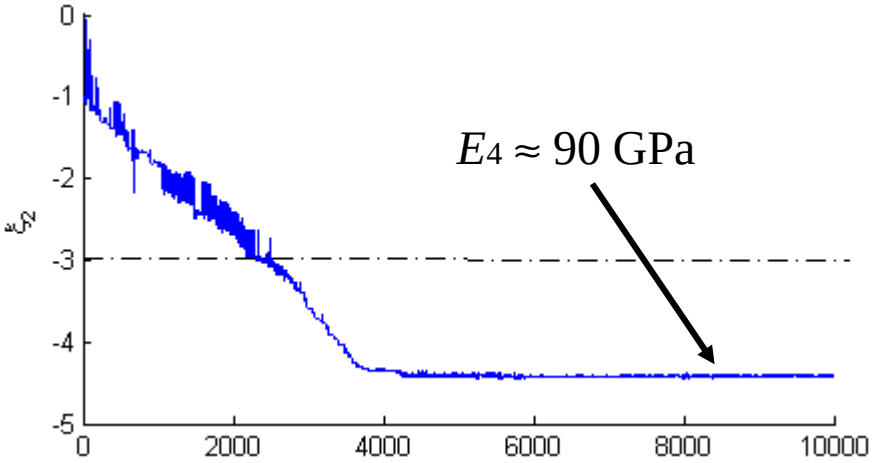
$p(E_1, E_5)$

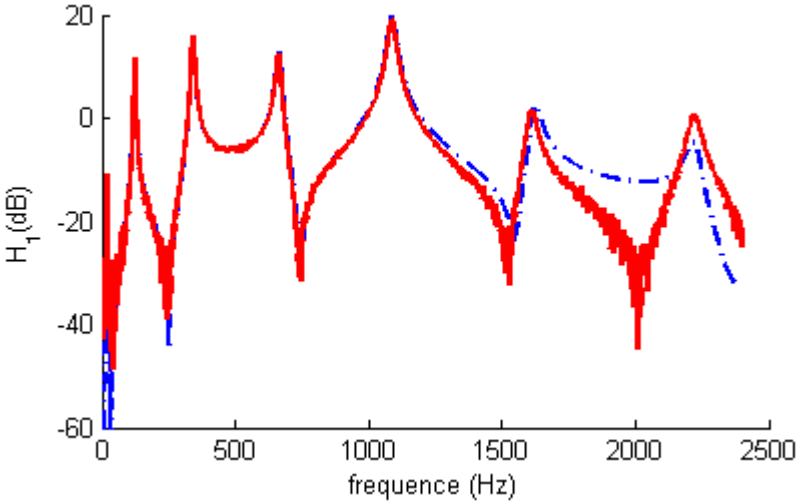


Effet de l'insuffisance de la modélisation



Inférence dans une bande fréquentielle plus large (0 2500] Hz





✓ paramètres recalés non-acceptables!

✓ mauvaise prédiction en hautes fréquences!

Prise en compte des erreurs de modélisation

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \sum_{r=1}^{n} \frac{-\omega^2 \mathcal{A}_{ij}^{(r)}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\eta_r\omega_r\omega}$$

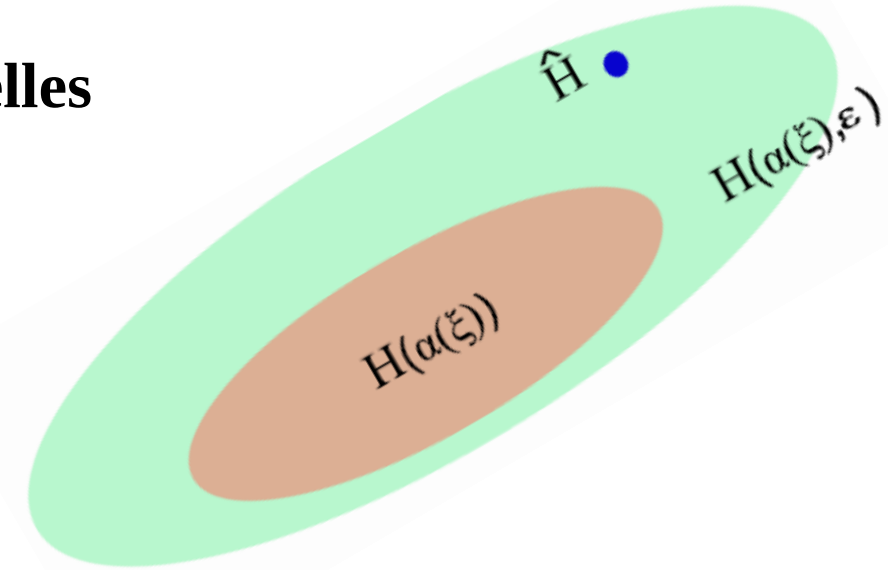
structure linéaire

✓ **Variables aléatoires additionnelles**

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\boldsymbol{\epsilon}_\omega ; \boldsymbol{\epsilon}_\mathcal{A}], \quad \boldsymbol{\epsilon}_\mathcal{A} = [\boldsymbol{\epsilon}_\mathcal{A}^{(1)} ; \cdots ; \boldsymbol{\epsilon}_\mathcal{A}^{(n_s)}],$$

✓ **Paramètres modaux hybrides**

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\epsilon}$$



Stratégies d'inférence

✓ **Approche marginale** **(ε: paramètres de nuisance)**

$$p(\boldsymbol{\xi}\,|\mathcal{D}) = \int_{\Omega(\epsilon)} p(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\epsilon}\,|\mathcal{D})\, d\boldsymbol{\epsilon}$$
$$= \frac{p(\boldsymbol{\xi})}{p(\mathcal{D})} \int_{\Omega(\epsilon)} p([\hat{H}]\,|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\epsilon})\, p(\boldsymbol{\epsilon}) d\boldsymbol{\epsilon}$$

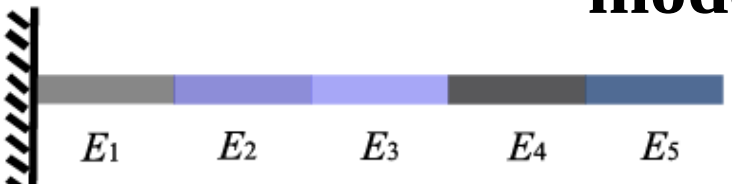
✓ **Approximation de Laplace:**

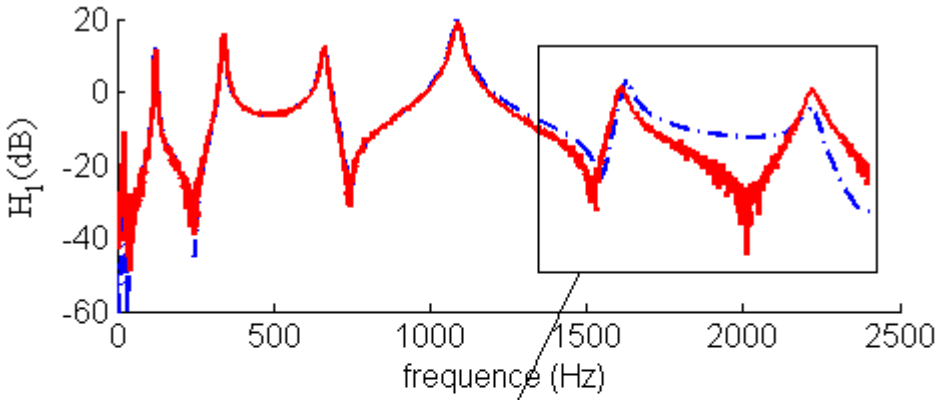
$$\int_{\Omega(\epsilon)} p([\hat{H}]\,|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\epsilon})\, p(\boldsymbol{\epsilon}) \mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon} \approx p([\hat{H}]\,|\boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}})\, p(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) / \sqrt{|U_{\xi}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}})|}$$

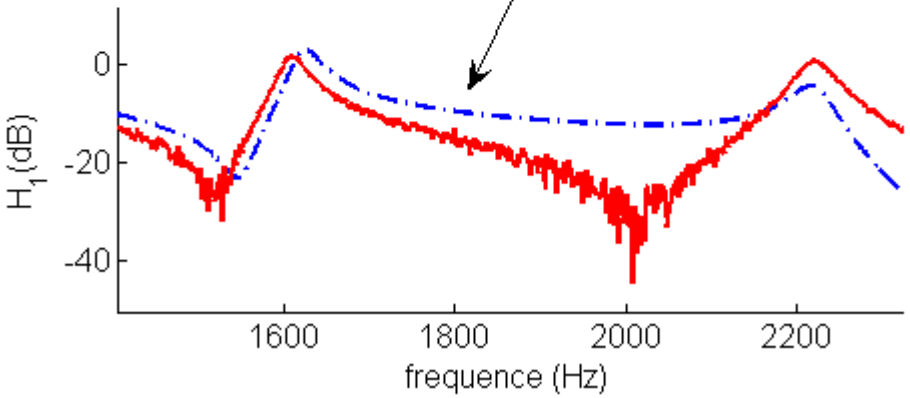
$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$: la valeur optimale.

→ **Optimiser ε pour chaque état ξ de la chaîne de Markov (Levenberg-Marquardt)**

Exemple pour prise en compte des erreurs de modélisation





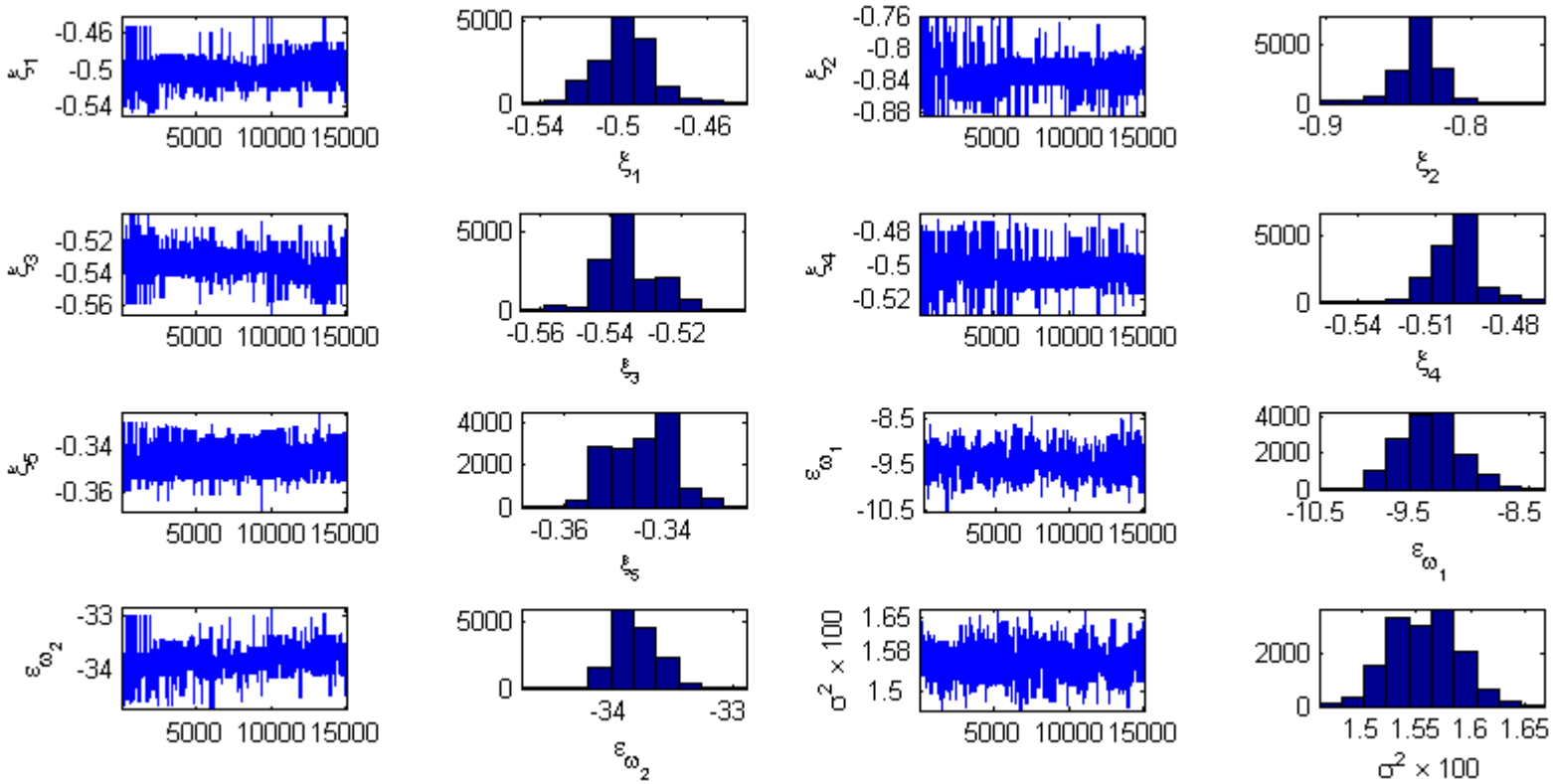


- **Ajout des variables :**

$$\epsilon_\omega = \{\epsilon_{\omega_6}, \epsilon_{\omega_7}\}$$

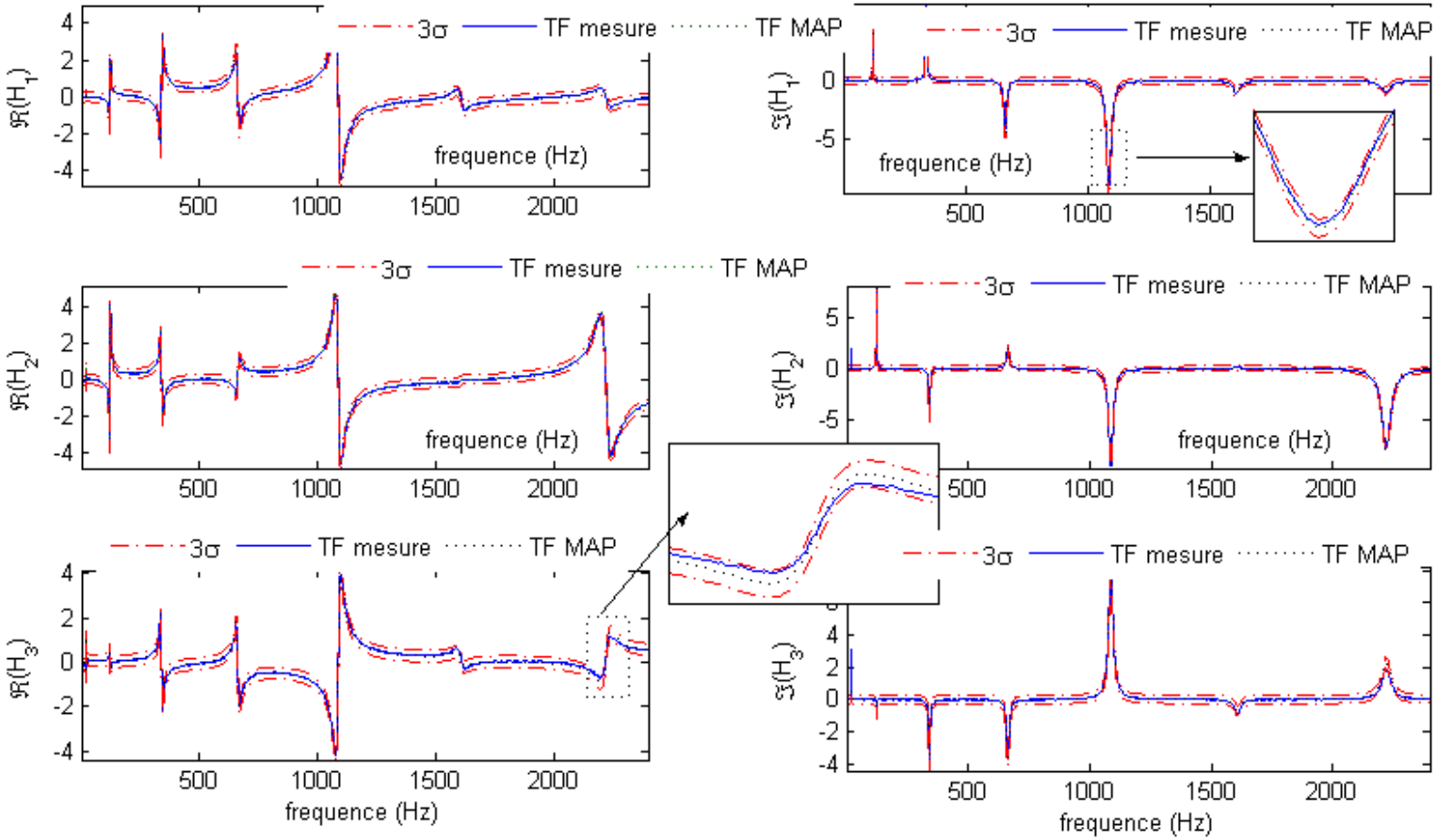
Approche marginale

✓ **Loi cible:** $p(\boldsymbol{\xi}, \epsilon_\omega, \sigma^2 \,|\mathcal{D})$



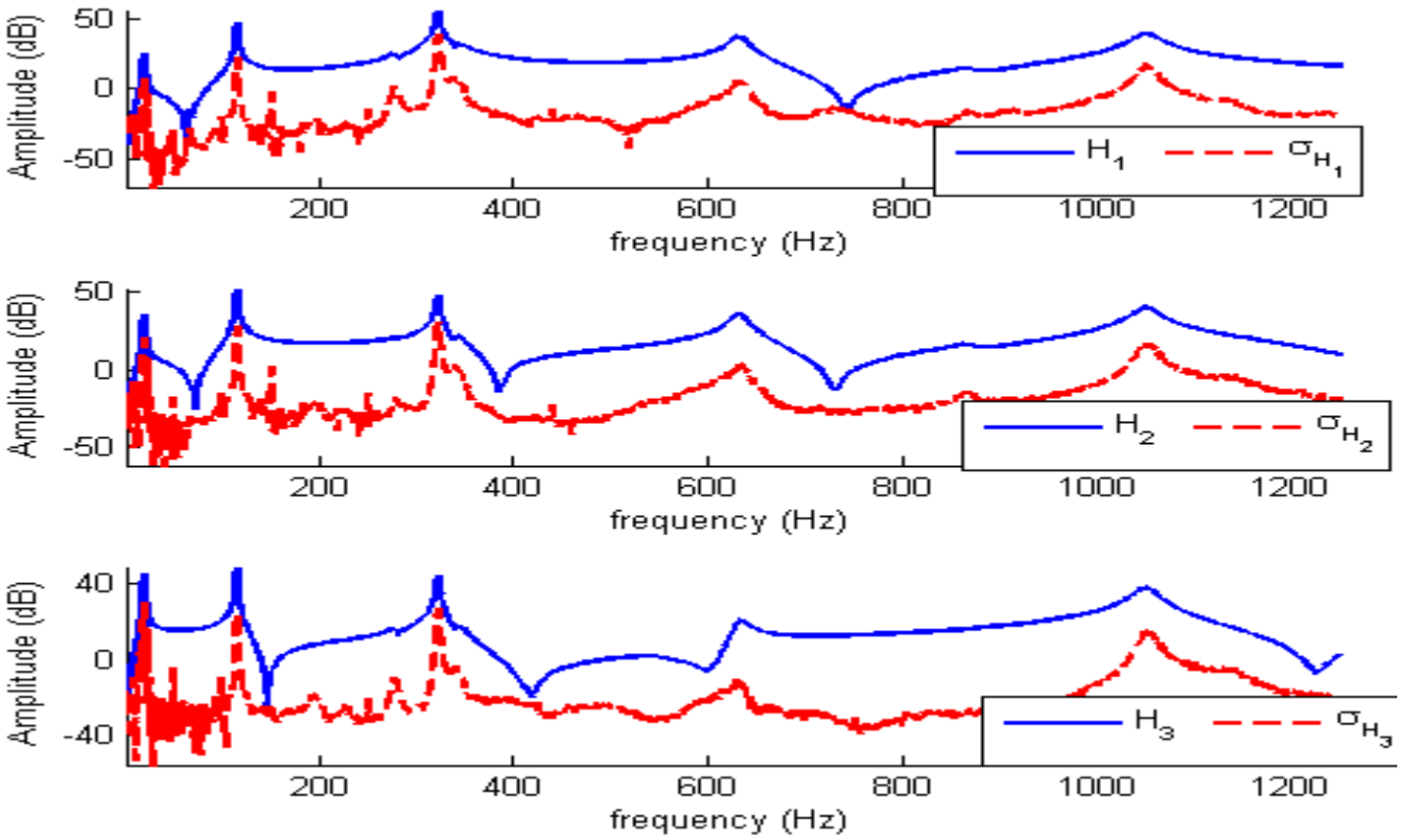
Approche marginale

✓ **Prédiction des fonctions de transfert à 90%**

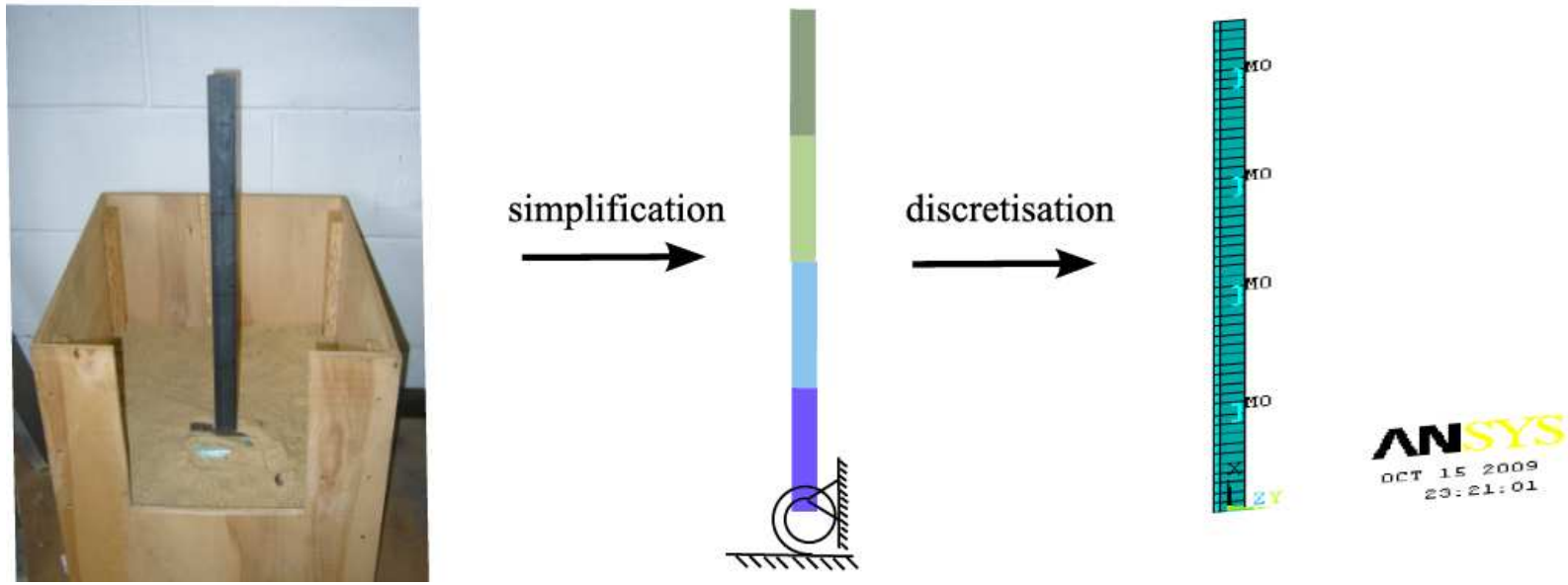


Validation expérimentale

Mesures expérimentales

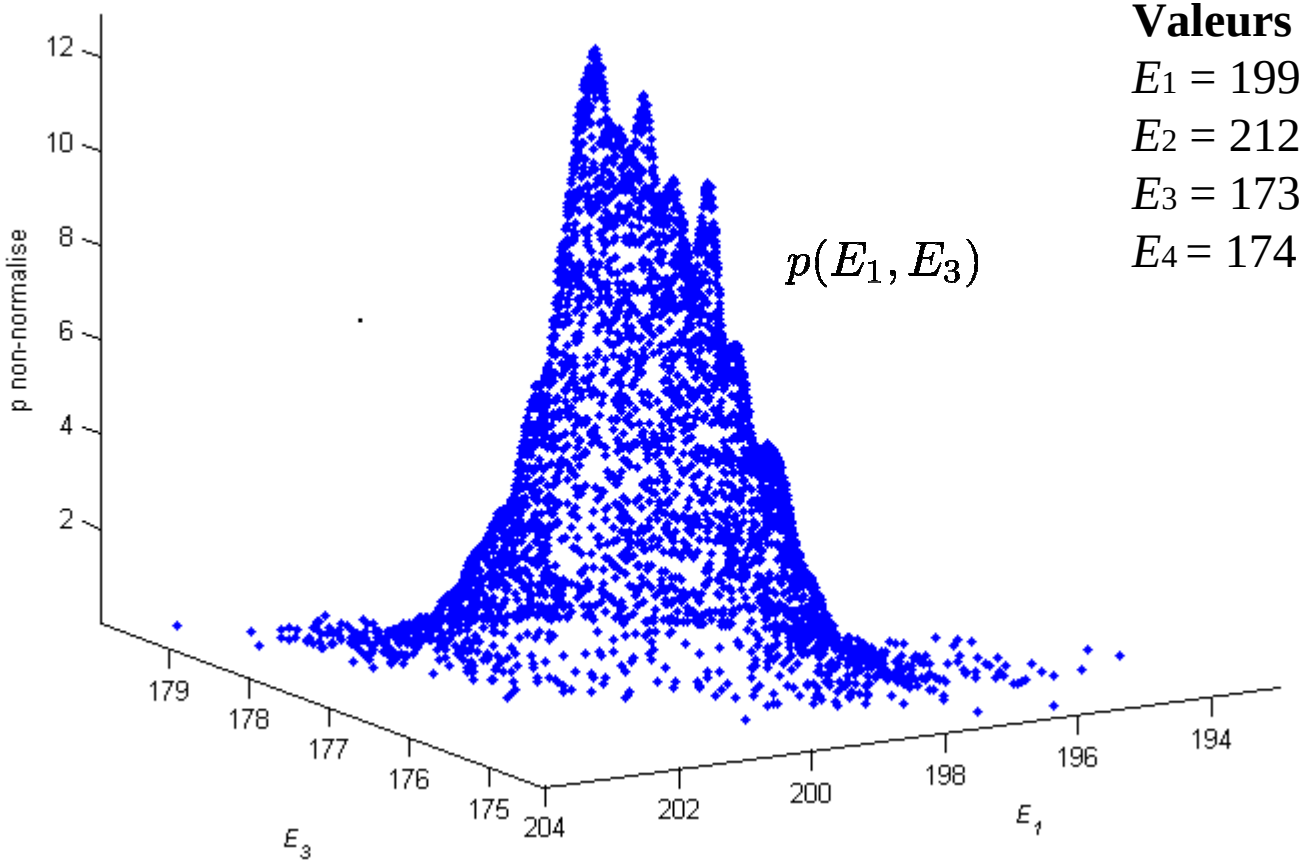


Modélisation de la structure



$$\boldsymbol{\theta} = \{E_1, E_2, E_3, E_4, k_\theta\}$$

Distribution de probabilité marginale *a posteriori*



Valeurs moyennes:

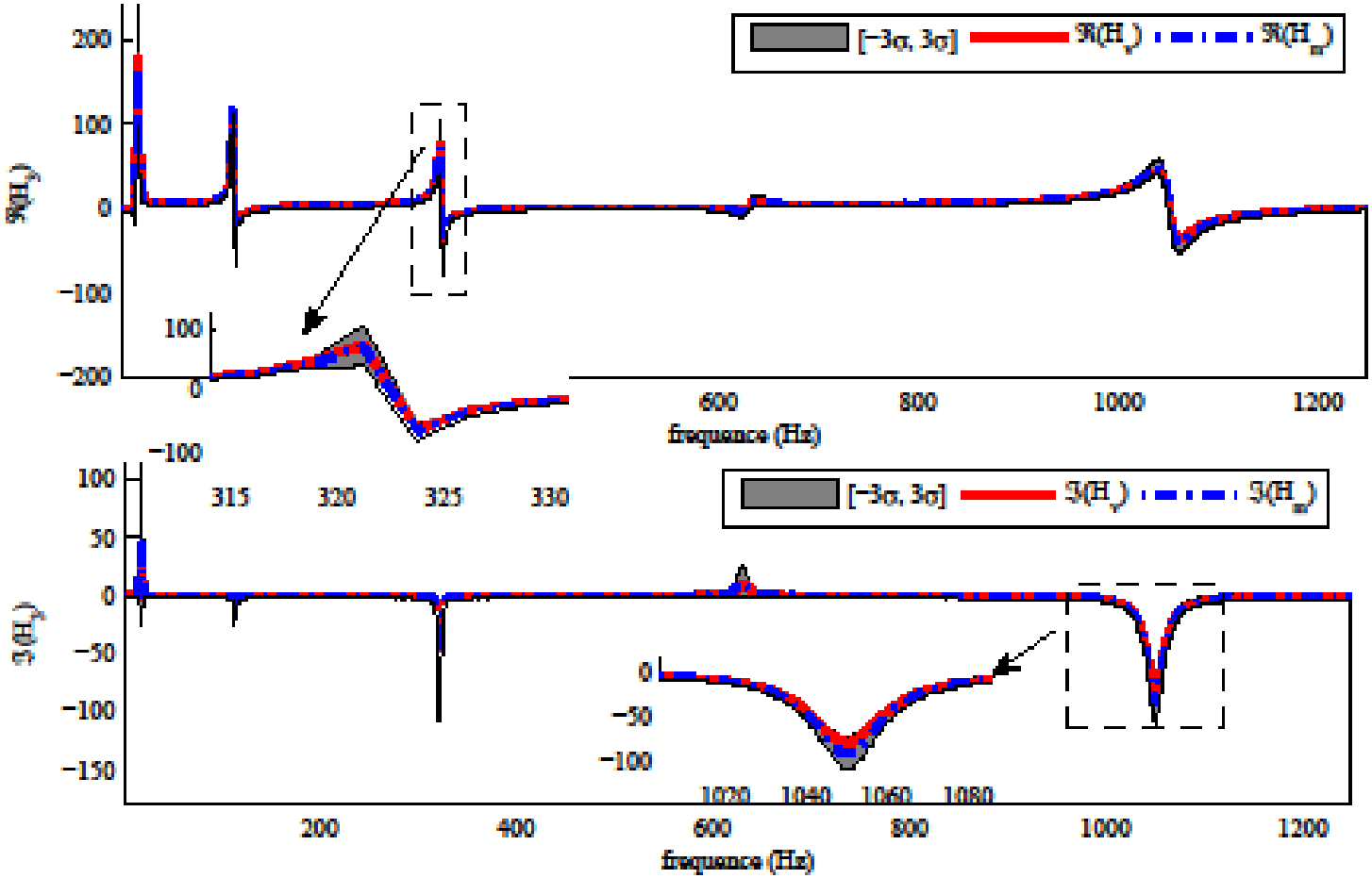
$E_1 = 199$

$E_2 = 212$

$E_3 = 173$

$E_4 = 174$

Résultats: Fonctions de transfert recalées



Conclusions

- **Une solution complète basée sur l'inférence bayésienne dans le domaine fréquentiel a été proposée :**

  - ✓ **Excitation multi-sinus (maîtrise des non-linéarités et du bruit de mesure)**
  - ✓ **Méta-modèle par Chaos polynomiale pour accélérer l'évaluation du modèle directe et la propagation des incertitudes**
  - ✓ **Traitement des erreurs de modélisation par introduction de variables stochastiques supplémentaires**
  - ✓ **Exploration de la distribution *a posteriori* par une méthode d'échantillonnage puissante (MCMC évolutionnaire)**

Je vous remercie de votre attention!